МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язання задач за темою
"ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.
Частина I.
Електрика"

з курсу "Загальна фізика"

для студентів усіх спеціальностей
та усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 28.12.2009

Харків НТУ "ХПІ" 2010

Методичні вказівки до розв’язання задач за темою "Електромагнетизм. Частина І. Електрика" з курсу "Загальна фізика" для студентів усіх спеціальностей та усіх форм навчання / Уклад.: Ветчинкіна З.К., Дзюбенко Н.І., Любченко О.А., Тавріна Т.В. – Харків: НТУ "ХПІ", 2010. – 68 с.

Укладачі: З.К. Ветчинкіна,
Н.І. Дзюбенко,
О.А. Любченко,
Т.В. Тавріна

Рецензент Н.Б. Фат’янова

Кафедра теоретичної та експериментальної фізики

ВСТУП

Методичні вказівки мають на меті допомогти студентам засвоїти теоретичний матеріал та знайти підходи до розв’язання типових задач та завдань підвищеної складності з тем "Електростатика" та "Постійний струм".

Широкий за рівнем та тематикою спектр задач дозволяє використовувати їх студентами усіх спеціальностей та усіх форм навчання.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

Електростатика вивчає електричне поле нерухомих електричних зарядів.

Електричний заряд q – скалярна фізична величина, яка є кількісною мірою властивості фізичних тіл чи частинок речовини вступати в електромагнітну взаємодію. Електричні заряди бувають *позитивні* та *негативні*, однойменні заряди відштовхуються, різнойменні – притягаються.

$[q]$ = Кулон = Кл.

Закон збереження електричного заряду: повний заряд (алгебраїчна сума зарядів) ізольованої замкнутої фізичної системи тіл залишається незмінним при будь-яких процесах, що відбуваються всередині системи.

Фундаментальним законом електростатики є *закон Кулона*:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \,, \tag{1.1}$$

де $\vec{F}_{12}$ – сила, що діє на заряд q_1 з боку заряду q_2; r – відстань між зарядами; $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор, направлений від заряду q_1 до заряду

q_2; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; $\vec{e}_r$ – одиничний вектор, що задає положення другого заряду відносно першого.

Силовою характеристикою електричного поля є *напруженість* – векторна величина, яка чисельно дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний заряд та збігається з нею за напрямком:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} , \tag{1.2}$$

де q' – позитивний заряд, внесений до поля (пробний заряд).

$[E]$ = Вольт/метр = В/м.

Напруженість поля, створеного *точковим зарядом* у вакуумі на відстані *r* від нього:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}_r . \tag{1.3}$$

Принцип суперпозиції: напруженість електричного поля системи точкових зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів кожного із зарядів окремо:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i . \tag{1.4}$$

Теорема Гауса: потік вектора $\vec{E}$ через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, обмежених цією поверхнею, поділеної на ε_0:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i . \tag{1.5}$$

Напруженість поля *рівномірно зарядженої сферичної поверхні* у точках, що розташовані зовні та всередині сфери ($\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$, відповідно) на відстані *r* від її центру:

$$E_{\text{зовн}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}; \qquad E_{\text{внутр}} = 0 \,. \tag{1.6}$$

Напруженість поля *рівномірно зарядженої кулі* радіуса R на відстані r від її центра, якщо

$$r > R: \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{1.7}$$

$$r < R: \quad E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^3}\cdot r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi\rho}{3}\cdot r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot r\,, \tag{1.8}$$

де ρ – *об'ємна густина заряду* (заряд одиниці об'єму речовини).

$$\rho = \frac{dq}{dV}\,. \tag{1.9}$$

$\left[\rho\right]$ = Кулон/метр^3 = Кл/м^3.

Напруженість поля нескінченно довгої *рівномірно зарядженої нитки* або нескінченно довгої зарядженої циліндричної поверхні у точках, що розташовані поза нею:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\,, \tag{1.10}$$

де a– відстань точки від нитки (або від осі циліндру); τ – *лінійна густина заряду* (заряд одиниці довжини нитки або циліндру):

$$\tau = \frac{dq}{dl}\,. \tag{1.11}$$

$\left[\tau\right]$ = Кулон/метр = Кл/м.

Напруженість поля рівномірно зарядженої *площини*:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,, \tag{1.12}$$

де σ – *поверхнева густина заряду* (заряд одиниці площі зарядженої поверхні):

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \qquad (1.13)$$

$[\sigma]$ = Кулон/метр^2 = Кл/м^2.

Напруженість поля *двох* нескінченних рівномірно заряджених *паралельних поверхонь* з поверхневою густиною заряду $+\sigma$ та $-\sigma$ у точках, розташованих між площинами E_1 та поза ними E_2:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}; \qquad E_2 = 0. \qquad (1.14)$$

Якщо знайдена напруженість електричного поля, то сила, що діє на заряд q:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \qquad (1.15)$$

При розгляді електричного поля у діелектриках використовується *теорема Гауса для індукції* електричного поля:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \sum_i q_i; \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad (1.16)$$

де $\vec{D}$ – вектор індукції електричного поля (вектор електричного зсуву); $\vec{P}$ – поляризованість діелектрика; q_i – сума вільних зарядів усередині замкненої поверхні.

Напруженість $\vec{E}$ та електричний зсув $\vec{D}$ зв'язані відношенням:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \kappa\varepsilon_0\vec{E} = (\kappa + 1)\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \qquad (1.17)$$

де κ – діелектрична сприйнятливість середовища, $\varepsilon = \kappa + 1$ – діелектрична проникність середовища.

$\left[D\right]=\left[P\right]$ = Кулон/метр^2= Кл/м^2.

Потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів, що знаходяться на відстані *r* (за умови, що $W_\infty = 0$):

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}. \qquad (1.18)$$

Енергетичною характеристикою електричного поля є *потенціал* φ – скалярна величина, що чисельно дорівнює потенціальній енергії, якою володіє в електричному полі одиничний позитивний заряд:

$$\varphi = \frac{W}{q^{/}}. \qquad (1.19)$$

Потенціал електричного поля, створеного *точковим зарядом* q (або зарядженою кулею) на відстані *r* від її центра:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \qquad (1.20)$$

Потенціал електричного поля, створеного системою зарядів у даній точці, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, що створюються окремими точковими зарядами (*принцип суперпозиції*):

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i . \qquad (1.21)$$

Напруженість та потенціал електричного поля зв'язані відношенням:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi , \qquad (1.22)$$

де $\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$ – *градієнт потенціалу*.

Для однорідного поля (одновимірний випадок)

$$E = \frac{\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{\Delta x} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}, \qquad (1.23)$$

де φ_1 та φ_2 – потенціали двох точок на одній силовій лінії; $\Delta\varphi$ – різниця потенціалів; Δx – відстань між точками, виміряна уздовж силової лінії.

Потенціальна енергія заряду q в точці поля з потенціалом φ:

$$W = q \cdot \varphi . \tag{1.24}$$

Робота електричного поля з переміщення заряду q із точки з потенціалом φ_1 в точку з потенціалом φ_2:

$$A = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = q\Delta\varphi . \tag{1.25}$$

Електрична ємність (*електроємність*) *конденсатора* дорівнює відношенню заряду на одній з обкладок конденсатору до різниці потенціалів між обкладками:

$$C = \frac{q}{\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)} = \frac{q}{\Delta\varphi} . \tag{1.26}$$

$\left[C\right]$ =Фарад = Ф.

Ємність відокремленої провідної *сфери* радіусом *R*, що знаходиться у середовищі із діелектричною проникністю ε :

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R . \tag{1.27}$$

Ємність *плоского конденсатора*

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} , \tag{1.28}$$

де *S* – площа пластини конденсатора; *d* – відстань між ними.

Ємність *сферичного конденсатора*

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_1 - R_2} , \tag{1.29}$$

де R_1 та R_2 – радіуси концентричних провідних сфер.

Ємність *циліндричного конденсатора*

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(R_2 / R_1\right)}, \tag{1.30}$$

де R_1 та R_2 – радіуси коаксіальних циліндрів, а l – їх довжина.

Ємність системи n конденсаторів, що з’єднані *паралельно*:

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i \, . \tag{1.31}$$

Ємність системи n конденсаторів, що з’єднані *послідовно*:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \, . \tag{1.32}$$

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} \, . \tag{1.33}$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Електричне поле створене двома точковими зарядами q_1 *та* q_2*, що розташовані в точках A та B, відповідно, на відстані d = 10 см один від одного. Знайти напруженість та потенціал електричного поля в точці C, якщо:*

1) q_1 *=8 нКл,* q_2 *= - 6 нКл,* $r_{AC} = r_{BC}$ *= 5 см;*

2) q_1 *=8 нКл,* q_2 *= 6 нКл,* $r_{AC} = r_{BC}$ *= 5 см;*

3) q_1 *=8 нКл,* q_2 *= 6 нКл,* r_{AC} *= 6 см;* r_{BC} *= 8 см;*

4) q_1 *=8 нКл,* q_2 *= 6 нКл,* $r_{AC} = r_{BC}$ *= 10 см;*

5) Знайти потенціал електричного поля в точці D, де напруженість поля дорівнює нулю, якщо q_1 *=8 нКл,* q_2 *= 6 нКл.*

Розв'язання

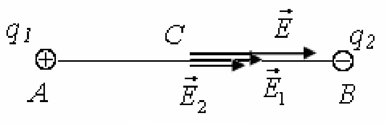

Рис. 1.1

1) Згідно з принципом суперпозиції електричних полів (1.4) кожен заряд створює поле незалежно від присутності інших зарядів. Тому напруженість поля в заданій точці визначимо як векторну суму напруженостей поля першого та другого зарядів (рис. 1.1):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

Напруженості полів (1.3), створених першим та другим зарядами, в точці *C* дорівнюють, відповідно:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{AC}^2}; \qquad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{BC}^2} .$$

Вектор $\vec{E}_1$ спрямований вздовж лінії, що з'єднує заряди, від заряду q_1 в бік заряду q_2, оскільки $q_1 > 0$.

Вектор $\vec{E}_2$ спрямований також вздовж цієї лінії в бік заряду q_2, оскільки $q_2 < 0$. Модуль вислідного вектора $\vec{E}$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{AC}^2} + \frac{q_2}{r_{BC}^2}\right).$$

Підставляючи числові значення, одержимо:

$$E = 9\cdot 10^9\left(\frac{8\cdot 10^{-9}}{25\cdot 10^{-4}} + \frac{6\cdot 10^{-9}}{25\cdot 10^{-4}}\right) = 5{,}04\cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

Потенціал електричного поля (1.21), створеного системою зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів полів, створених кожним із зарядів незалежно один від одного: $\varphi = \sum\limits_i \varphi_i$. Тому для двох зарядів

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

де φ_1 та φ_2 – потенціали полів точкових зарядів (1.20) q_1 та q_2 складають, відповідно:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_{AC}}, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r_{BC}}.$$

Взявши до уваги те, що заряд q_2 негативний, одержимо:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r_{BC}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{q_2}{r_{BC}}\right) =$$

$$= 9\cdot 10^9\left(\frac{8\cdot 10^{-9}}{5\cdot 10^{-2}} - \frac{6\cdot 10^{-9}}{5\cdot 10^{-2}}\right) = 3{,}6\cdot 10^2 \text{ В.}$$

2) Якщо обидва заряди позитивні, то в точці C вектори $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$ спрямовані у протилежні боки (рис. 1.2). Тому модуль вислідного вектора $\vec{E}$ є різницею між модулями векторів $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$:

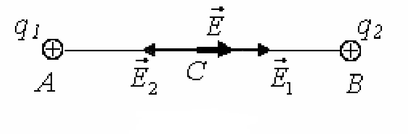

Рис. 1.2

$$E = E_1 - E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{AC}^2} - \frac{q_2}{r_{BC}^2}\right).$$

Підстановка числових значень дає результат:

$$E = 9\cdot 10^9\left(\frac{8\cdot 10^{-9}}{25\cdot 10^{-4}} - \frac{6\cdot 10^{-9}}{25\cdot 10^{-4}}\right) = 7,2\cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

Потенціал точки C

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r_{BC}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{q_2}{r_{BC}}\right) =$$

$$= 9\cdot 10^9\left(\frac{8\cdot 10^{-9}}{5\cdot 10^{-2}} + \frac{6\cdot 10^{-9}}{5\cdot 10^{-2}}\right) = 2,52\cdot 10^3 \text{ В.}$$

3) Якщо відстань між зарядами складає d = 10 см, а визначити напруженість електричного поля потрібно в точці, що відстоїть від першого заряду на r_{AC} = 6 см, а від другого – на r_{BC} = 8 см, то виявляється, що точка C є вершиною прямокутного (єгипетського) трикутника. До речі, таких точок дві і вони розташовані симетрично ділянці AB. Знайдемо напруженість поля в одній з них. Як легко бачити на рис. 1.3, вислідний вектор $\vec{E}$ в точці C є діагоналлю

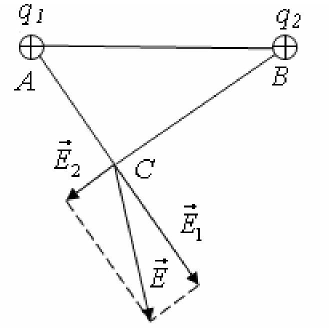

Рис. 1.3

прямокутника, побудованого на векторах $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$, що дорівнюють, відповідно:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{AC}^2}; \qquad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{BC}^2}.$$

Тому модуль вислідного вектора знайдемо за допомогою теореми Піфагора:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{AC}^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{BC}^2}\right)^2}.$$

$$E = 9\cdot 10^9 \sqrt{\left(\frac{8\cdot 10^{-9}}{36\cdot 10^{-4}}\right)^2 + \left(\frac{6\cdot 10^{-9}}{64\cdot 10^{-4}}\right)^2} = 2{,}16\cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

Потенціал точки C

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r_{BC}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{q_2}{r_{BC}}\right) =$$

$$= 9\cdot 10^9\left(\frac{8\cdot 10^{-9}}{6\cdot 10^{-2}} + \frac{6\cdot 10^{-9}}{8\cdot 10^{-2}}\right) = 1{,}88\cdot 10^3 \text{ В}.$$

4) У випадку, коли точка C, в якій треба визначити напруженість, відстоїть від кожного із зарядів на 10 см, а відстань між зарядами також складає 10 см, вислідний вектор $\vec{E}$ є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$ як на сторонах. Модулі цих векторів:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{AC}^2};$$

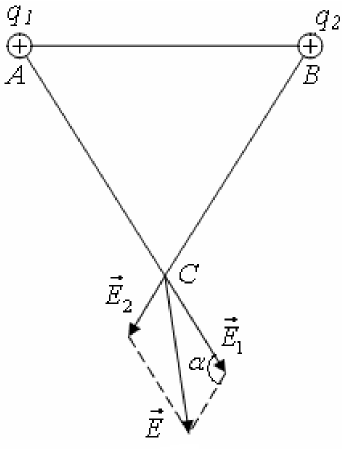

Рис. 1.4

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{BC}^2}.$$

Модуль вислідного вектора знайдемо за допомогою теореми косинусів:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{AC}^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{BC}^2}\right)^2 - 2\cdot\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{AC}^2}\cdot\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{BC}^2}\cos\alpha}.$$

Виходячи із геометрії розташування зарядів та точки C (рис. 1.4), кут між векторами $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$ складає 60^0, тоді шуканий кут α дорівнює 120°.

Тоді модуль вектора $\vec{E}$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\left(\frac{8\cdot10^{-9}}{10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{6\cdot10^{-9}}{10^{-2}}\right)^2 - 2\left(\frac{48\cdot10^{-18}}{10^{-4}}\right)\cos120^0} =$$

$$= 1{,}1\cdot10^4 \text{ В/м.}$$

Потенціал точки C

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r_{BC}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{AC}} + \frac{q_2}{r_{BC}}\right) =$$

$$= 9\cdot10^9\left(\frac{8\cdot10^{-9}}{10\cdot10^{-2}} + \frac{6\cdot10^{-9}}{10\cdot10^{-2}}\right) = 1{,}26\cdot10^3 \text{ В.}$$

5) Спочатку знайдемо положення точки D (рис. 1.5), напруженість поля в якій дорівнює нулю.

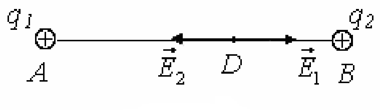

Рис. 1.5

Позначимо: $r_{AD} = x$, а $r_{BD} = d - x$. Якщо $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$, то $E_1 = E_2$, звідки

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{AD}^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{DC}^2}, \qquad \frac{8\cdot 10^{-9}}{x^2}=\frac{6\cdot 10^{-9}}{(d-x)^2}$$

та остаточно:

$$x^2-0,8x-0,04=0.$$

Корені цього рівняння $x_1=0,054$ м, $x_2=0,746$ м (ця відповідь не задовольняє умовам задачі).

Потенціал точки *D*

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_{AD}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r_{BD}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{AD}}+\frac{q_2}{r_{BD}}\right)=$$

$$=9\cdot 10^9\left(\frac{8\cdot 10^{-9}}{5,4\cdot 10^{-2}}+\frac{6\cdot 10^{-9}}{4,6\cdot 10^{-2}}\right)=2,51\cdot 10^3 \text{ В.}$$

Задача 2

В вершинах квадрата зі стороною a знаходяться однакові позитивні заряди q = 1 мкКл. Який негативний заряд треба помістити в центр квадрата для того, щоб уся система знаходилася у рівновазі?

Розв'язання

Система буде знаходитися у рівновазі, якщо рівнодійна усіх сил, що діють на кожен з зарядів (рис. 1.6), буде дорівнювати нулю:

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_0=0.$$

Це означає, що рівнодійна сил відштовхування між позитивними зарядами $\vec{F}_{123}$ повинна врівноважитися силою притягання $\vec{F}_0$ до негативного заряду, розташованого у центрі *O*. Кожна з сил взаємодії між зарядами визначаються згідно із законом Кулона (1.1).

Якщо $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$, а сторона та діагональ квадрату дорівнюють a та $a\sqrt{2}$, відповідно, то:

$$F_1 = F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2};$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2a^2}.$$

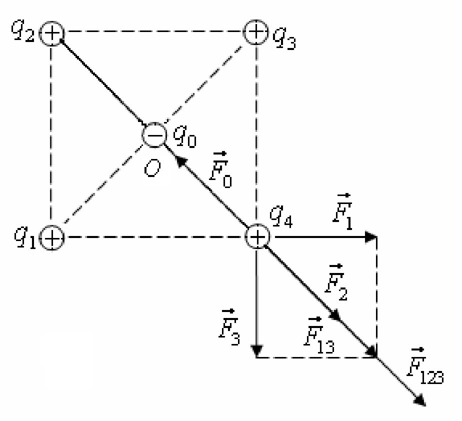

Рис. 1.6

Тоді

$$F_{13} = F_1\sqrt{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2\sqrt{2}}{a^2},$$

$$F_{123} = F_{13} + F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2\sqrt{2}}{a^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2a^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right).$$

В свою чергу

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2qq_0}{a^2}.$$

Враховуючи, що $F_{123} = F_0$, одержимо

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2qq_0}{a^2},$$

звідки

$$q_0 = q\frac{\sqrt{2} + 0,5}{2} = 0,956q = 0,956 \cdot 10^{-6} = 9,56 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.}$$

Задача 3

Дві однаково заряджені кульки, що підвішені на нитках однакової довжини, розійшлися на кут 2α *(рис. 1.7). Яка густина* ρ_2 *матеріалу кульок, якщо при зануренні їх у гас, кут між ними не змінився? Густина гасу* ρ_1 *= 800 кг/м*^{3}*, а його діелектрична проникність* ε *= 2.*

Розв'язання

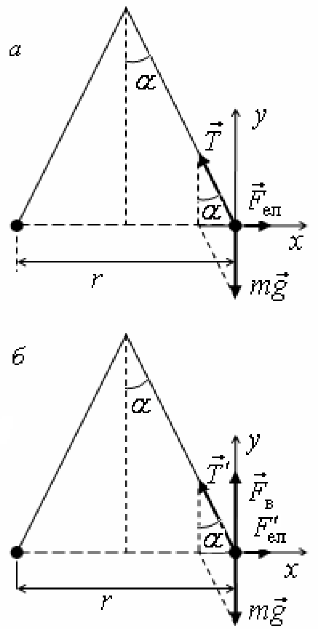

Рис. 1.7

На кожну з кульок у повітрі діють сили: $m\vec{g}$ – сила тяжіння (спрямована вертикально донизу), $\vec{T}$ – сила натягу нитки та $\vec{F}_{\text{ел}}$ – сила електричної взаємодії кульок (кулонівська сила) (рис. 1.7, *а*). Згідно з другим законом Ньютона

$$0 = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ел}} + \vec{T}\ .$$

Спроектуємо це рівняння на осі *x* та *y*:

$$\begin{cases} 0 = F_{\text{ел}} - T\sin\alpha, \\ 0 = -mg + T\cos\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\sin\alpha = F_{\text{ел}}, \\ T\cos\alpha = mg. \end{cases}$$

Поділимо перше рівняння системи на друге та одержимо:

$$tg\alpha = \frac{F_{\text{эл}}}{mg}\ .$$

З урахуванням того, що $F_{\text{ел}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q_1q_2}{r^2}$ (1.1) та $m = \rho_2 V$, де V – об'єм кульки, маємо:

$$tg\alpha = \frac{F_{\text{ел}}}{mg} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2 \rho_2 V g}\ .$$

Умова рівноваги кульки у гасі згідно з другим законом Ньютона (рис. 1.7, *б*):

$$0 = m\vec{g} + \vec{F}'_{\text{ел}} + \vec{T}' + \vec{F}_{\text{в}}\,,$$

де $\vec{F}'_{\text{ел}}$ – сила електричної взаємодії зарядів кульок у гасі, $\vec{T}'$ – сила натягу нитки, $\vec{F}_{\text{в}}$ – виштовхуюча (архімедова) сила, яка визначається згідно з законом Архімеда: на тіло, занурене у рідину чи газ, діє виштовхуюча сила, що дорівнює вазі рідини або газу, яку витиснено об'ємом тіла.

Проекції на осі *x* та *y* мають вигляд:

$$\begin{cases} 0 = F'_{\text{ел}} - T'\sin\alpha, \\ 0 = -mg + T'\cos\alpha + F_{\text{в}}. \end{cases}$$

Враховуючи те, що у даному випадку $F'_{\text{ел}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$, де ε – діелектрична проникність гасу, одержимо:

$$tg\alpha = \frac{F'_{\text{ел}}}{mg - F_{\text{в}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2 \left(\rho_2 - \rho_1\right) V g}\ .$$

Оскільки згідно умов задачі кути розходження у повітрі та у гасі є однаковими, то прирівняємо значення тангенсів відповідних кутів:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2 \rho_2 V g} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2 \left(\rho_2 - \rho_1\right) V g}\,,$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\varepsilon\left(\rho_2 - \rho_1\right)},$$

Звідки $$\rho_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\rho_1\,.$$

Підставляючи густину гасу та його діелектричну проникність, маємо результат:

$$\rho_2 = 1{,}6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 4

Електричне поле створене трьома нескінченними протяжними паралельними площинами із поверхневими густинами зарядів σ_1 = +1 нКл/м^2, σ_2 = – 2 нКл/м^2, σ_3 = +2 нКл/м^2. Визначити напруженості електричного поля між площинами та зовні площин.

Розв’язання

Площини розбивають простір на чотири області: I, II, III та IV. Кожна заряджена площина створює в цих областях електричне поле з напруженостями (1.12) рівними

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}, \qquad E_2 = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}, \qquad E_3 = \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}.$$

Напрямки векторів $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ показані на рис. 1.8, а модулі відповідних векторів напруженостей:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{1\cdot 10^{-12}}{2\cdot 8,85\cdot 10^{-12}} = 5,6\cdot 10^{-2} \text{ В/м},$$

$$E_2 = E_3 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{2\cdot 10^{-12}}{2\cdot 8,85\cdot 10^{-12}} = 11,2\cdot 10^{-2} \text{ В/м}.$$

Згідно з принципом суперпозиції (1.4) напруженість поля у кожній з областей дорівнює векторній сумі напруженостей полів, створених кожною із площин окремо:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3.$$

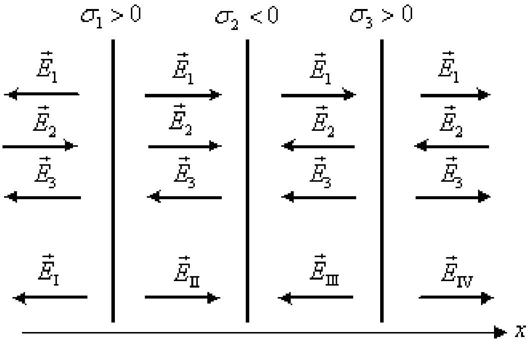

Рис. 1.8

Оберемо позитивний напрям осі x та визначимо проекції напруженостей вислідного електричного поля в кожній з областей (E_I, E_{II}, E_{III} та E_{IV}):

$$E_I = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = -5,6 \cdot 10^{-2} \text{ В/м},$$

$$E_{II} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ В/м},$$

$$E_{III} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = -16,8 \cdot 10^{-2} \text{ В/м},$$

$$E_{IV} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ В/м}.$$

Задача 5

Тонкий стрижень завдовжки 20 см рівномірно заряджений з лінійною густиною заряду τ = 1 нКл/см. Визначити:

1) напруженість поля, створеного стрижнем в точці A (рис. 1.9), що лежить на продовженні його осі на відстані a = 10 *см від найближчого кінця;*

2) силу взаємодії стрижня та заряду q = 10 *нКл, якщо він розташований в точці A.*

Розв’язання

1) Розіб’ємо стрижень (рис. 1.9) на нескінченно малі елементи довжиною *dx*, заряд *dq* яких можна вважати точковим. Тоді напруженість поля (1.3) цього точкового заряду в точці *A*

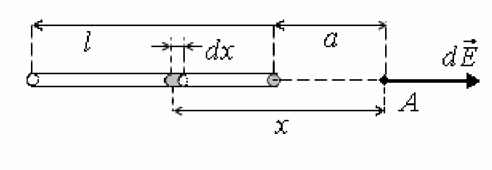

Рис.1.9

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{x^2}.$$

З врахування того, що $\tau = \dfrac{dq}{dx}$ (1.11), величина заряду $dq = \tau \cdot dx$, тоді напруженість (1.10)

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau \cdot dx}{x^2}.$$

Вектори напруженостей $d\vec{E}$ від усіх елементів довжини стрижня спрямовані вздовж його осі в один бік, тому згідно із принципом суперпозиції полів (1.4) модуль напруженості електричного поля в точці *A*

$$E = \int_a^{a+l} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau \cdot dx}{x^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{a+l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau \cdot l}{a(a+l)}.$$

Підставимо числові значення та одержимо, що напруженість електричного поля в точці *A*

$$E = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-9} \cdot 0,2}{0,1(0,1 + 0,2)} = 6 \cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

2) Напруженість електричного поля (1.2) чисельно дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний заряд, $\vec{E} = \vec{F}/q$, а значить, величина сили взаємодії (1.15) між зарядом та стрижнем залежить від відстані між ними згідно із залежністю

$$F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cdot \tau \cdot l}{a(a + l)}.$$

Тоді на відстані *a* від кінця стрижня сила взаємодії

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-8} \cdot 10^{-9} \cdot 0,2}{0,1(0,1 + 0,2)} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

Задача 6

Дві кульки однакових радіусів R = 1 см та маси m = 0,15 кг заряджені до однакового потенціалу φ = 3 кВ та знаходяться на деякій відстані r_1 одна від іншої. При цьому їх енергія гравітаційної взаємодії $W_{\text{гр}}$ = 10 пДж. Кульки зближуються до відстані r_2. Робота, що необхідна для зближення кульок, А = 2 мкДж. Знайти енергію W_e електростатичної взаємодії кульок після їх зближення.

Розв'язання

До зближення кульок їх енергія гравітаційної взаємодії дорівнювала

$$W_{\text{гр}} = G\frac{m^2}{r_1},$$

звідки початкова відстань між ними

$$r_1 = G\frac{m^2}{W_{\text{гр}}}.$$

Енергія електричної взаємодії (1.18) з урахуванням того, що для вакууму (або повітря) $\varepsilon = 1$, становить:

$$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_1}.$$

Заряд кульки згідно з (1.26, 1.27):

$$q = C\varphi = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi.$$

Оскільки радіуси та потенціали кульок однакові, то $q_1 = q_2 = q$.

Тоді потенціальна енергія електричної взаємодії

$$W_e = 4\pi\varepsilon_0\frac{R^2\varphi^2}{r_1}.$$

Для зближення кульок необхідно виконати роботу A проти сил поля, яка дорівнює приросту енергії електростатичної взаємодії:

$$A = W_e' - W_e,$$

де W_e' – шукана енергія електростатичної взаємодії кульок після їх зближення.

Звідси

$$W_e' = A + W_e = A + \frac{4\pi\varepsilon_0 R^2\varphi^2 W_{\text{гр}}}{Gm^2}.$$

Підставивши числові дані, одержимо:

$$W_e' = 2\cdot 10^{-6} + \frac{10^{-4}\cdot 9\cdot 10^{6}\cdot 10^{-11}}{9\cdot 10^{9}\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 225\cdot 10^{-4}} = 2,67\cdot 10^{-6}\ \text{Дж}.$$

Задача 7

Знайти потенціал φ точки поля, що відстоїть на r = 10 см від центру зарядженої кулі радіусом R = 1 см. Задачу розв'язати, якщо:

1) задана поверхнева густина заряду на кулі σ = 0,1 мкКл /м^2;

2) заданий потенціал кулі φ_0 = 300 В.

Розв'язання

Потенціал зарядженої кулі змінюється обернено пропорційно відстані *r* від центру кулі у відповідності до

$$\varphi = \int_r^{\infty} E_r dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

1) Якщо задана поверхнева густина заряду на кулі $\sigma = \frac{q}{S}$, то заряд кулі $q = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4\pi R^2$, а потенціал

$$\varphi = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{10^{-7}(0,01)^2}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} = 11,3 \text{ В.}$$

2) Потенціал точки на поверхні кулі

$$\varphi_0 = \int_R^{\infty} E_r dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R},$$

звідки заряд кулі $q = \varphi_0 \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$.

Тоді шуканий потенціал точки на відстані *r* від центру кулі

$$\varphi = \frac{\varphi_0 \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{\varphi_0 R}{r} = \frac{300 \cdot 0,01}{0,1} = 30 \text{ В.}$$

Задача 8

Між пластинами плоского конденсатора, що знаходяться на відстані d_1 = 5 мм одна від іншої, прикладена різниця потенціалів U = 150 В. До однієї з пластин прилягає плоскопаралельна пластинка з фарфору завтовшки d_2 = 3 мм. Знайти напруженості E_1 та E_2 поля в повітрі та в фарфорі.

Розв'язання

Дві основні характеристики електричного поля: силова (напруженість $\vec{E}$) (1.2) та енергетична (потенціал φ) (1.19) зв'язані відношенням (1.22): $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$. Для одновимірного випадку (1.23) $E = -\dfrac{d\varphi}{dl}$. Тоді $d\varphi = -Edl$ або $U = \int_1^2 Edl$, де U– різниця потенціалів між обкладками конденсатора.

Оскільки в плоскому конденсаторі у межах кожного діелектрика поле є однорідним, то попереднє відношення можна записати у вигляді

$$U = E_1 l_1 + E_2 l_2 ,$$

де $l_1 = d_1 - d_2$ – товщина шару повітря, $l_2 = d_2$ – товщина шару фарфору.

Границя розділу діелектриків паралельна обкладкам, а отже, перпендикулярна силовим лініям поля. За відсутності вільних зарядів на поверхні діелектрика індукція (1.17) електричного поля (електричний зсув)

$$D_1 = D_2 \qquad \text{та} \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2 .$$

Діелектрична проникність повітря $\varepsilon_1 = 1$, діелектрична проникність фарфору $\varepsilon_2 = 6$.

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} U = E_1(d_1 - d_2) + E_2 d_2, \\ \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \end{cases}$$

виразимо шукані напруженості полів:

$$E_1 = \frac{U}{(d_1 - d_2) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2},$$

$$E_2 = \frac{U}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(d_1 - d_2) + d_2}.$$

Підстановка числових даних дає:

$$E_1 = 60\ \text{кВ/м}, \qquad E_2 = 10\ \text{кВ/м}.$$

Задача 9

З якою силою (на одиницю довжини) притягуються дві різнойменно заряджені нитки, що відстоять на відстані r_1 = 1 см. Лінійні густини електричного заряду ниток дорівнюють τ_1 = 0,3 нКл/м та τ_2 = 0,1 нКл/м. Визначити роботу на одиницю довжини, яку треба здійснити для того, щоб розсунути нитки на відстань r_2 = 2 см.

Розв'язання

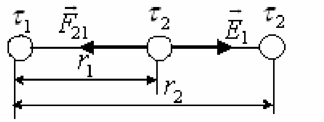

Рис.1.10

Перша нитка створює електричне поле (1.10) напруженістю $E_1 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1}$. На заряд $q_2 = \tau_2 l$, скупчений на ділянці l другої нитки, діє сила

$$F_{21} = E_1 q_2 = \frac{\tau_1 \tau_2 l}{2\pi\varepsilon_0 r_1}.$$

Сила, що діє на одиницю довжини нитки, дорівнює

$$F_l = \frac{F_{12}}{l} = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0 r_1}.$$

Роботу, що здійснює заряд, можна визначити двома способами.

1-й спосіб.

Згідно із визначенням, робота є $A = \int_{r1}^{r2} \vec{F} d\vec{r}$. Сила F залежить від відстані r між нитками:

$$F = F_{21} = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

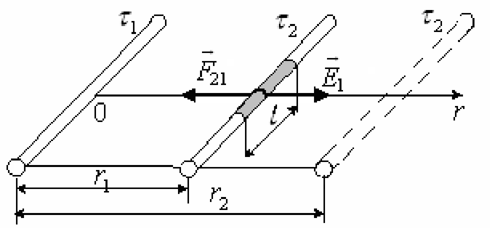

Рис. 1.11

Робота електричної сили з розсування заряджених ниток з відстані r_1 на відстань r_2 дорівнює

$$A = \int_{r1}^{r2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r1}^{r2} F \cdot dr \cdot \cos\alpha = -\int_{r1}^{r2} q_2 E_1 dr = -\frac{\tau_1 \tau_2 l}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r1}^{r2} \frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{\tau_1 \tau_2 l}{2\pi\varepsilon_0} (\ln r_2 - \ln r_1) = -\frac{\tau_1 \tau_2 l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

де α = 180° – кут між напрямами переміщення та сили.

Робота, що припадає на одиницю довжини нитки, становить

$$A_l = \frac{A}{l} = -\frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

2-й спосіб.

$A = q_2(\varphi_1 - \varphi_2)$ – робота електричного поля з переміщення заряду q_2 між точками, що розташовані на відстанях r_1 та r_2 від першої нитки і потенціали яких дорівнюють φ_1 та φ_2, відповідно.

Різниця потенціалів $(\varphi_1 - \varphi_2) = -\int\limits_{r_1}^{r_2} E_1 dr$, де $E_1 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1}$, а у якості точкового заряду q_2 візьмемо заряд одиниці довжини нескінченно довгої нитки, а саме, τ_2.

В цьому випадку робота згідно з (1.25)

$$A_l = q_2(\varphi_1 - \varphi_2) = -q_2 \int\limits_{r_1}^{r_2} E_1 dr = -\frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} (\ln r_2 - \ln r_1) = -\frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Обидва способи визначення дали результат $A_l = -\dfrac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{r_2}{r_1}$.

Оскільки робота сил поля від'ємна, то робота, яку потрібно здійснити зовнішніми силами, щоб розсунути нитки, повинна бути додатною.

$$A' = -A = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Розрахунки в одиницях СІ дають наступні результати для сили та роботи, що припадають на одиницю довжини нитки:

$$F_l = \frac{10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 5{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ Н.}$$

$$A_l = \frac{10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \ln 2 = 3{,}7 \cdot 10^{-10} \text{ Дж.}$$

Задача 10

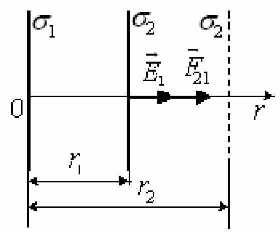

Рис. 1.12

Дві нескінченні протяжні паралельні площини розташовані на відстані r_1 *= 10 см (рис. 1.12). Поверхнева густина електричного заряду площин дорівнює* σ_1 *= 3 пКл/м*^{2} *та* σ_2 *= 2 пКл/м*^{2}*, відповідно. Знайти:*

1) силу (на одиницю площі), з якою відштовхуються площини;

2) роботу сил електричного поля (на одиницю площі) з розсовування пластин на відстань r_2 *= 20 см.*

Розв’язання

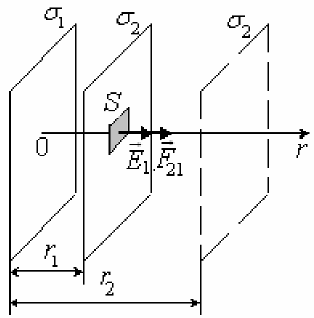

Рис. 1.13

1) Будемо вважати, що перша площина створює електричне поле напруженістю (1.12) $E_1 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$. Виділимо на другій площині площинку S із зарядом $q_2 = \sigma_2 S$ (рис. 1.13). На заряд q_2 в електричному полі, що створене першою площиною, діє сила $F_{21} = q_2 E_1 = \dfrac{\sigma_2 \sigma_1 S}{2\varepsilon_0}$. Тоді сила, що діє на одиницю площі площини, дорівнює $F_S = \dfrac{F_{21}}{S} = \dfrac{\sigma_1 \sigma_2}{2\varepsilon_0}$.

2) Робота електричної сили, що діє на площинку S, при збільшенні відстані між площинами від r_1 до r_2, дорівнює:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} q_2 E_1 dr = \frac{\sigma_1 \sigma_2 S}{2\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{\sigma_1 \sigma_2 S}{2\varepsilon_0} (r_2 - r_1) .$$

Тоді робота з розсування площин, що припадає на одиницю площі, становить:

$$A_S = \frac{A}{S} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 (r_2 - r_1)}{2\varepsilon_0}.$$

Проведемо розрахунки в одиницях СІ:

$$F_s = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{3 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 3,4 \cdot 10^{-13} \text{ Н.}$$

$$A_s = \frac{\sigma_1 \sigma_2 (r_2 - r_1)}{2\varepsilon_0} = \frac{3 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-12} (0,2 - 0,1)}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 3,4 \cdot 10^{-14} \text{ Дж.}$$

Задача 11

Дві кульки із зарядами q_1 *= 6,66 нКл та* q_2 *=13,33 нКл знаходяться на відстані* r_1 *= 40 см. Яку роботу А треба здійснити для того, щоб зблизити їх до відстані* r_2*= 25 см?*

Розв'язання

Оскільки обидва заряди позитивні, то для їх зближення необхідно, щоб зовнішні сили $A_{зов}$ зробили роботу проти сил електричного поля:

$$A_{зов} = -A,$$

де $A = q \cdot \Delta\varphi$ – робота електричного поля (1.25).

Припустимо, що заряд q_2 переміщається в електричному полі, створеному зарядом q_1, між точками, потенціали (1.20) яких становлять, відповідно:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_1}, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_2}.$$

Тоді

$$A = q_2 \cdot \Delta\varphi = q_2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = q_2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_2}\right) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot 6{,}66 \cdot 10^{-9} \cdot 13{,}33 \cdot 10^{-9}\left(\frac{1}{40 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{25 \cdot 10^{-2}}\right) = -1{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Робота зовнішніх сил буде $A_{\text{зов}} = -A = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Такий же результат можна отримати, базуючись на дещо іншому підході, який полягає у тому, що робота дорівнює зміні потенціальної енергії взаємодії зарядів, а саме:

$$A = \Delta W_{\text{пот}} = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r_2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Задача 12

Біля зарядженої нескінченної площини знаходиться точковий заряд q= 0,66 нКл. Заряд перемістився під кутом $\alpha = 30^\circ$ *до лінії напруженості на відстань* Δr *= 2 см, при цьому зовнішніми силами була здійснена робота А = 2 мкДж. Знайти поверхневу густину заряду на площині.*

Розв'язання

Згідно з умовами задачі зовнішні сили здійснюють додатну роботу з переміщення позитивного заряду q, тобто працюють проти сил поля. З цього випливає, що площина є зарядженою позитивно.

Із відношення між напруженістю та потенціалом електричного поля (1.22) $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ витікає, що для одновимірного випадку (1.23) $E = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}$, звідки:

$$\Delta\varphi = \Delta x \cdot E .$$

Штрихові лінії (рис. 1.14) є слідами перетину площиною рисунку еквіпотенційних поверхонь, що є площинами, паралельними зарядженій площині. Враховуючи це, маємо:

$$\varphi_1 = \varphi_C = \varphi_D , \quad \varphi_2 = \varphi_B .$$

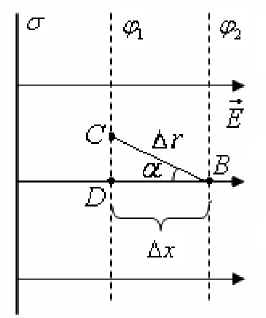

Рис. 1.14

Робота електричного поля (1.25) з переміщення заряду з точки *B* в точку *C* дорівнює роботі з переміщення заряду з точки *B* в точку *D*, тобто $A_{BC} = A_{BD} = A$.

$$A = q \cdot \Delta\varphi = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = q\left(\varphi_B - \varphi_C\right) = q\left(\varphi_B - \varphi_D\right) =$$

$$= q\Delta x E = q\Delta r \cos\alpha \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Звідси шукана поверхнева густина заряду

$$\sigma = \frac{2A\varepsilon_0}{q \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{0{,}66 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}866} = 3{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2.$$

Задача 13

Альфа-частинка, що вилітає при радіоактивному розпаді з атома радію, рухається до ядра натрію. Визначити, на яку найменшу відстань r зможе наблизитися альфа-частинка до нерухомого ядра натрію, якщо її швидкість при вильоті з атома радію складала $1{,}6\cdot10^7$ м/с.

Розв'язання

Систему «ядро атома натрію – α - частинка» можна вважати замкненою та консервативною. Тоді повна енергія $W_{\text{п}}$ точкового заряду, що рухається у потенціальному полі, є незмінною і у будь-якій момент часу дорівнює

$$W_{\text{п}} = W_{\text{кін}} + W_{\text{пот}} = \text{const},$$

де $W_{\text{кін}} = \dfrac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія (релятивістську поправку до кінетичної енергії можна не враховувати, оскільки швидкість α - частинки мала в порівнянні зі швидкістю світла); $W_{\text{пот}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_\alpha q_{Na}}{r}$ – потенціальна енергія частинки (1.18) у полі ядра натрію.

Оскільки α - частинка та ядро заряджені позитивно, між ними діють кулонівські сили відштовхування. Рух α - частинки продовжуватиметься до тих пір, поки вся її початкова кінетична енергія не витратиться на роботу по подоланню сил відштовхування, тобто не перейде в потенціальну енергію α -частинки. Тому запишемо:

$$W_{\text{кін}} = W_{\text{пот}},$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\alpha q_{Na}}{r},$$

звідки шукана відстань

$$r = \frac{2q_\alpha q_{Na}}{4\pi\varepsilon_0 m v^2} .$$

Заряд α - частинки за модулем дорівнює подвійному елементарному заряду *e*, а заряд ядра натрію становить 11*e*. З огляду на це маємо:

$$r = \frac{2e \cdot 11e \cdot 2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m \cdot v^2} = \frac{44e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m \cdot v^2} .$$

Підставляючи числові дані, одержуємо $r = 6 \cdot 10^{-15}$ м.

Задача 14

Знайти роботу з переміщення заряду q= 50 нКл з точки 1 в точку 2 (рис. 1.15) в полі, що створене двома точковими зарядами q_1 *= –1 мкКл та* q_2 *= 1 мкКл (a = 0,1 м, b = 0,2 м).*

Розв’язання

Робота з переміщення заряду (1.25) в електричному полу дорівнює $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, де φ_1 та φ_2 – потенціали електричного поля, створеного зарядами q_1 та q_2 в точках 1 та 2 (рис. 1.15).

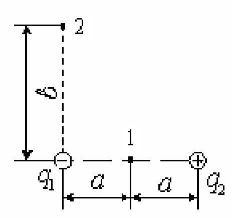

Рис. 1.15

Згідно з принципом суперпозиції (1.21):

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} ,$$

$$\varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{22} ,$$

де $\varphi_{11} = -\dfrac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon a}$ та $\varphi_{12} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon a}$ – потенціали (1.20), що створені зарядами q_1 та q_2 в точці 1;

а $\varphi_{21} = -\dfrac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b}$, $\varphi_{22} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{4a^2 + b^2}}$ – потенціали (1.20), що створені зарядами q_1 та q_2 в точці 2.

Згідно з умовами задачі $|\varphi_{11}| = \varphi_{12}$, отже, потенціал точки 1

$$\varphi_1 = -\frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a} = 0,$$

а потенціал точки 2

$$\varphi_2 = -\frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{4a^2 + b^2}}.$$

Робота з переміщення заряду q з точки 1 в точку 2

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\left(0 + \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{4a^2 + b^2}}\right) =$$

$$= q\left(\frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{4a^2 + b^2}}\right).$$

Після підстановки числових значень в одиницях СІ одержуємо відповідь:

$$A = 50\cdot 10^{-9}\left(\frac{10^{-6}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}2} - \frac{10^{-6}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot\sqrt{4\cdot 0{,}1^2 + 0{,}2^2}}\right) =$$

$$= 660 \text{ мкДж}.$$

Задача 15

Електрон з деякою швидкістю влітає в плоский горизонтально розташований конденсатор паралельно пластинам на рівній відстані від них. Напруженість поля в конденсаторі E = 100 В/м, відстань між пластинами d *= 4 см. Через який час* t *після того, як електрон влетів в конденсатор, він потрапить на одну з пластин? На якій відстані* s *від початку конденсатора електрон потрапить на пластину, якщо він був прискорений різницею потенціалів* U_0 *= 60 В? Визначити швидкість* v *електрона в момент зіткнення з пластиною конденсатора і кут* α *, який траєкторія електрона утворює із пластиною.*

Розв'язання

До потрапляння в конденсатор електрон був прискорений електричним полем, отже, набута їм кінетична енергія дорівнює роботі електричного поля:

$$\Delta W_{\text{кін}} = W_{\text{кін}2} - W_{\text{кін}1} = \frac{mv_0^2}{2} - 0 = qU_0 = eU_0 .$$

Тоді швидкість, з якою електрон, заряд якого *e*= 1,6 10^{-19} Кл, а маса m = $9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, влітає в конденсатор, становить

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot60}{9{,}1\cdot10^{-31}}} = 4{,}6\cdot10^6 \text{ м/с.}$$

Рух електрона в зарядженому конденсаторі є складним. Заряджена частинка бере участь одночасно у двох рухах: рівномірному – вздовж осі *x* та рівноприскореному – вздовж осі *y*. Цей рух описується кінематичними рівняннями:

$$\begin{cases} x = v_x t, \\ v_x = v_0 = \text{const}, \\ y = \dfrac{at^2}{2}, \\ v_y = at. \end{cases}$$

В точці потрапляння електрона на пластину конденсатора (точка А на рис. 1.16) ці рівняння мають вигляд:

$$\begin{cases} s = v_x t, \\ v_x = v_0 = \text{const}, \\ \dfrac{d}{2} = \dfrac{at^2}{2}, \\ v_y = at. \end{cases}$$

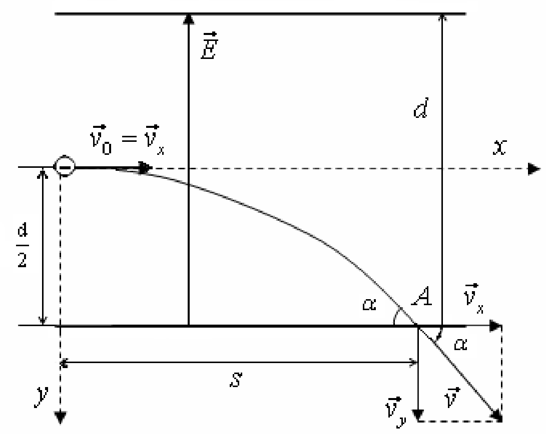

Рис. 1.16

Прискорення частинки можна визначити з рівняння руху (другого закону Ньютона):

$$ma = F = qE = eE\,,$$

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 1{,}76 \cdot 10^{13} \text{ м/с}^2.$$

З третього рівняння системи час руху частинки в конденсаторі

$$t = \sqrt{\frac{d}{a}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-2}}{1{,}76 \cdot 10^{13}}} = 4{,}77 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

Тоді відстань s від початку конденсатора до точки зіткнення електрона з пластиною

$$s = v_x t = 4{,}6 \cdot 10^{6} \cdot 4{,}76 \cdot 10^{-8} = 0{,}22 \text{ м,}$$

а вертикальна складова швидкості

$$v_y = at = 1{,}76 \cdot 10^{13} \cdot 4{,}77 \cdot 10^{-8} = 8{,}4 \cdot 10^{5} \text{ м/с.}$$

Швидкість в точці А та її модуль:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y\,,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(4{,}6 \cdot 10^{6}\right)^2 + \left(8{,}4 \cdot 10^{5}\right)^2} = 4{,}68 \cdot 10^{6} \text{ м/с.}$$

Кут α, який траєкторія частинки складає із пластиною конденсатора в т. А, можна вважати рівним куту α у трикутнику швидкостей, отже,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{8{,}4 \cdot 10^{5}}{4{,}6 \cdot 10^{6}} = 0{,}18\,,$$

Тоді шуканий кут $\alpha = \mathrm{arctg}\,0{,}18 = 10{,}35^\circ$.

Задача 16

В електронно-променевій трубці відстань від кінця керуючих пластин до екрану l = 25 см. Довжина пластин b = 6 см, відстань між пластинами h = 1,8 см (рис. 1.17). При різниці потенціалів на пластинах U = 50 В пляма, що світиться, змістилася на екрані на s = 21 мм від місця, де вона міститься, коли відсутня різниця потенціалів. З якою швидкістю електрони влітають у поле пластин? Дію сили тяжіння не враховувати.

Розв'язання

Електрон в електричному полі пластин рухається прискорено під дією електричної сили $\vec{F} = e\vec{E}$, що направлена уподовж осі *Y*. Рух його вздовж осі *X* – рівномірний. У момент потрапляння електрона в електричне поле $Y_0 = 0$. Тому рух уздовж осей *X* та *Y* описується як

$$\begin{cases} x = V_0 t, \\ y = \dfrac{at^2}{2}, \end{cases}$$

де *a* – прискорення електрона, яке можна знайти із рівняння руху (другого закону Ньютона):

$$m_e a = F = eE ,$$

де m_e та *e* – маса та заряд електрона.

Тоді, враховуючи, що $U = \int_0^h E \cdot dy = Eh$, прискорення електрона

$$a = \frac{eE}{m_e} = \frac{eU}{m_e h} .$$

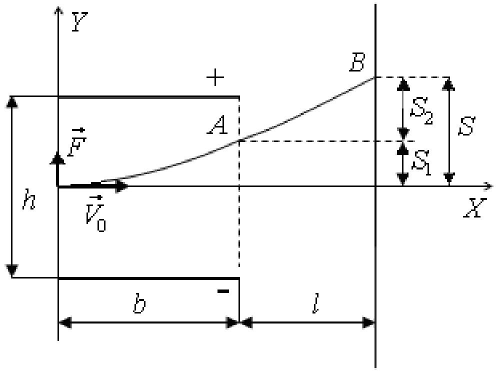

Рис. 1.17

Якщо $x = b$, то час руху електрона у полі пластин $t_1 = b/V_0$. За цей час електрон зміститься уздовж осі *Y* на відстань S_1:

$$S_1 = y = \frac{at^2}{2} = \frac{e \cdot U \cdot t_1^2}{2mh} = \frac{e \cdot U \cdot b^2}{2mhV_0^2}.$$

На ділянці *AB* рух електрона рівномірний прямолінійний. Тому

$$\begin{cases} x = V_0\, t, \\ y = V_y\, t. \end{cases}$$

де $V_y = a \cdot t_1 = \dfrac{eU}{mh} \cdot \dfrac{b}{V_0}$ – вертикальна складова швидкості в точці *A*, а $t_2 = \dfrac{l}{V_0}$ – час, за який електрон пройде відстань *l* до екрану.

Тоді
$$S_2 = V_y t_2 = \frac{eUbl}{mhV_0^2},$$

а зміщення на екрані:

$$S = S_1 + S_2,$$

$$S = \frac{eUb^2}{2mhV_0^2} + \frac{eUbl}{mhV_0^2} = \frac{eUb}{mhV_0^2}\left(\frac{b}{2} + l\right).$$

Звідси швидкість електронів

$$V_0 = \sqrt{\frac{eUb}{mhS}\left(\frac{b}{2}+l\right)}.$$

Після підстановки числових значень одержуємо V_0 = 2·10^7 м/с.

Задача 17

Електрон, що пройшов у плоскому конденсаторі шлях від однієї пластини до іншої, набуває швидкості v = 10^6 м/с. Відстань між пластинами d = 5,3 мм. Знайти різницю потенціалів U між пластинами конденсатора, напруженість E електричного поля усередині конденсатора та поверхневу густину σ заряду на пластинах.

Розв'язання

Швидкість *v* та відповідну їй кінетичну енергію електрон набув за рахунок роботи електричного поля (1.25):

$$\Delta W_{\text{кін}} = W_{\text{кін2}} - W_{\text{кін1}} = \frac{mv^2}{2} - 0 = qU = eU ,$$

де *e* та *m* – заряд (за модулем) та маса електрона.

Різниця потенціалів (напруга) між пластинами конденсатора

$$U = \frac{mv^2}{2e} = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{12}}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} = 2{,}8 \text{ В}.$$

Оскільки напруженість та потенціал електричного поля пов'язані відношенням $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi$ (1.22), то для одновимірного випадку (1.23), що має місце в конденсаторі, напруженість

$$E = \frac{U}{d} = \frac{2{,}8}{5{,}3\cdot 10^{-3}} = 528 \text{ В/м}.$$

З іншого боку, напруженість (1.12) електричного поля в конденсаторі

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} .$$

Звідси поверхнева густина заряду на пластинах

$$\sigma = \varepsilon_0 E = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 528 = 4,68 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2.$$

Задача 18

Протон влітає в плоский горизонтально розташований конденсатор паралельно пластинам зі швидкістю v_x = 9·10^4 м/с. Різниця потенціалів між пластинами U= 10 В; відстань між пластинами d = 1 см. Знайти повне a, нормальне a_n та тангенціальне a_τ прискорення протона через час t = 10 мкс після початку його руху в конденсаторі та радіус кривини R траєкторії протона в цій точці.

Розв'язання

Складний рух протона в зарядженому конденсаторі складається з рівномірного руху вздовж осі *x* та рівноприскореного – вздовж осі *y*. Як результат, траєкторія руху буде криволінійною, і в деякий момент часу *t* протон буде знаходитися в точці *A* (рис. 1.18, *а*). Прискорення електрона можна визначити за допомогою другого закону Ньютона:

$$ma = F ,$$

де $F = qE = eE$ (1.15).

Враховуючи те, що $E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{U}{d}$ (1.23), отримаємо

$$ma = eE = \frac{eU}{d} .$$

Тоді повне прискорення протона

$$a = \frac{eU}{md} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}{1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 0,01} = 9,65 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2.$$

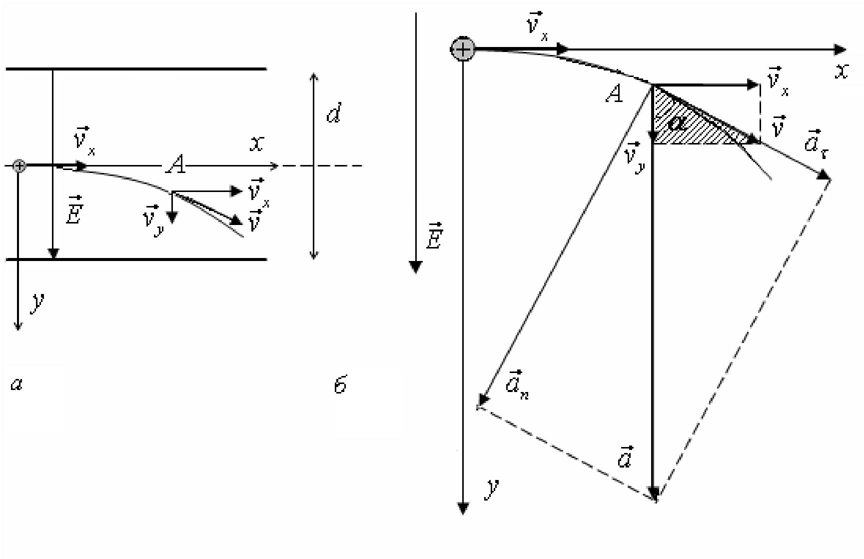

Рис. 1.18

В момент часу *t* вертикальна складова швидкості в точці *A*

$$v_y = at = 9,65 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6} = 9,65 \cdot 10^4 \text{ м/с.}$$

Швидкість та її модуль:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(9 \cdot 10^4\right)^2 + \left(9,65 \cdot 10^4\right)^2} = 1,32 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

На рис.1.18, *б* наведено збільшене схематичне зображення швидкостей та прискорень у точці *A*. Видно, що трикутник швидкостей (відмічений штриховкою) та трикутник прискорень – подібні, бо обидва трикутники прямокутні та мають однаковий кут α. Отже, їх сторони пропорційні:

$$\frac{v}{a} = \frac{v_x}{a_n} = \frac{v_y}{a_\tau}.$$

Тоді з відношення

$$\frac{v}{a} = \frac{v_x}{a_n}$$

нормальне прискорення

$$a_n = a\frac{v_x}{v} = 9{,}65 \cdot 10^{10} \cdot \frac{9 \cdot 10^4}{1{,}32 \cdot 10^5} = 6{,}58 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2,$$

а з відношення $\frac{v}{a} = \frac{v_y}{a_\tau}$

тангенціальне прискорення

$$a_\tau = a\frac{v_y}{v} = 9{,}65 \cdot 10^{10} \cdot \frac{9{,}65 \cdot 10^4}{1{,}32 \cdot 10^5} = 7{,}05 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2.$$

Радіус кривини траєкторії з огляду на те, що $a_n = \frac{v^2}{R}$, дорівнює

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(1{,}32 \cdot 10^5\right)^2}{6{,}58 \cdot 10^{10}} = 0{,}265 \text{ м.}$$

Задача 19

Знайти роботу А поля з переміщення заряду q = 10 нКл з точки 1 в точку 2 між двома різнойменно зарядженими з поверхневою густиною σ = 0,4 мкКл/м^2 нескінченними паралельними площинами, відстань l між якими дорівнює 3 см.

Розв'язання

Можливі два способи розв'язання задачі.

1-й спосіб.

Роботу сил поля (1.25) з переміщення заряду q з точки 1 поля з потенціалом φ_1 в точку 2 з потенціалом φ_2 знайдемо як

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Для визначення різниці потенціалів між точками 1 та 2 проведемо через ці точки еквіпотенціальні поверхні I та II (рис. 1.19). Ці поверхні будуть площинами, оскільки поле між двома рівномірно зарядженими нескінченними паралельними площинами є однорідним. Різниця потенціалів в однорідному полі

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E\int_1^2 dl = El,$$

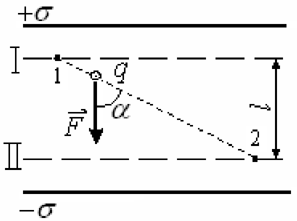

Рис. 1.19

де E – напруженість поля; l – відстань між еквіпотенціальними поверхнями.

Напруженість поля (1.14) між паралельними нескінченними різнойменно зарядженими площинами $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Отже, робота

$$A = qEl = \frac{q\sigma l}{\varepsilon_0}.$$

2-й спосіб.

Оскільки поле є однорідним, то сила, що діє на заряд q під час його переміщення, є незмінною.

Тому роботу з переміщення заряду з точки 1 в точку 2 можна визначити згідно із формулою

$$A = F\Delta r \cdot \cos\alpha,$$

де F – сила, що діє на заряд q; Δr – модуль переміщення заряду q з точки 1 в точку 2; α – кут між напрямами переміщення та сили.

Сила (1.15) $F = qE = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0}$. Підставимо цей вираз в формулу для визначення роботи та з урахуванням того, що $\Delta r \cdot \cos\alpha = l$, отримаємо

$$A = \frac{q\sigma l}{\varepsilon_0}.$$

Таким чином, обидва способи розв'язання дають однаковий результат.

Після підстановки числових значень отримуємо

$$A = \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{8,85 \cdot 10^{-12}}$$ = 1,36·10^{-5} Дж = 13,6 мкДж.

Задача 20

На плоский повітряний конденсатор подається різниця потенціалів U = 2 кВ. Розміри пластин 40 × 60 см^2, відстань між ними d = 0,5 см. Після зарядки конденсатор від'єднують від джерела і потім розсовують його обкладки так, що відстань між ними збільшується удвічі. Визначити:

1) роботу по розсуванню обкладок;

2) густину енергії електричного поля до і після розсування обкладок.

Розв'язання

1) Робота з розсування пластин дорівнює зміні енергії (1.33) зарядженого конденсатора $A = W_2 - W_1$. Енергія конденсатора, у свою чергу, залежить від ємності та різниці потенціалів:

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2}, \qquad W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2}.$$

Оскільки конденсатор був відокремлений від джерела струму, то заряд на його обкладках не змінився, тобто $q_1 = q_2$. Звідси, враховуючи (1.26), можна написати $C_1U_1 = C_2U_2$. Ємності конденсатора до $\left(C_1\right)$ та після розсування $\left(C_2\right)$ обкладок дорівнюють:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad \text{та} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}.$$

Звідси витікає, що $C_1 = 2C_2$ і, як результат, $U_2 = 2U_1$. Тоді можна розрахувати роботу з розсування обкладок конденсатора:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{C_2U_2^2}{2} - \frac{C_1U_1^2}{2} = \frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d} = 8{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

2) Густина енергії електричного поля визначається згідно з формулою

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2},$$

де E – напруженість електричного поля.

Оскільки $E_1 = U_1/d_1$ та $\varepsilon = 1$, то густина енергії до розсування пластин $w_1 = \dfrac{\varepsilon_0 U_1^2}{2d_1^2}$, а після розсування: $w_2 = \dfrac{\varepsilon_0 U_2^2}{2d_2^2}$.

Але $U_2 = 2U_1$ та $d_2 = 2d_1$. Тому густина енергії після розсування пластин не змінилася.

Задача 21

Площа пластин плоского повітряного конденсатора S = 0,01 м^2, відстань між ними d = 5 мм. До пластин прикладена різниця потенціалів U_1 = 300 В. Після від'єднання конденсатора від джерела напруги проміжок між пластинами заповнюється ебонітом (діелектрична проникність ε =2,6).

1) Якою буде різниця потенціалів U_2 між пластинами після заповнення?

2) Знайти ємності конденсатора C_1 та C_2, а також поверхневі густини заряду σ_1 та σ_2 на пластинах до та після заповнення.

3) Розв'язати задачу за умов, коли заповнення простору між пластинами ізолятором проводиться при включеному джерелі напруги.

Розв'язання

1) Заповнення конденсатора ебонітом проводилось після від'єднання від джерела напруги, тому за законом збереження електричного заряду заряд на пластинах конденсатора залишається незмінним $q = \text{const}$. Тоді не змінюється й поверхнева густина заряду (1.13) на пластинах, тобто $\sigma = \dfrac{q}{S} = \text{const}$.

З виразу для напруженості електричного поля в конденсаторі (1.14) $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ та відношення між напруженістю та потенціалом (1.23) поверхнева густина заряду $\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{U}{d}$. Отже $\sigma d = \varepsilon\varepsilon_0 U$.

Враховуючи те, що $\sigma = \text{const}$ та $d = \text{const}$, для незаповненого конденсатора та конденсатора, заповненого ебонітом, маємо, відповідно:

$$\sigma d = \varepsilon_1\varepsilon_0 U_1 \quad \text{та} \quad \sigma d = \varepsilon_2\varepsilon_0 U_2 .$$

Тоді з виразу $U_1\varepsilon_1 = U_2\varepsilon_2$ можемо отримати різницю потенціалів після заповнення:

$$U_2 = U_1\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{300\cdot 1}{2,6} = 115,4 \text{ В.}$$

2) Шукані ємності знайдемо згідно з (1.28) для ємності плоского конденсатора.

До заповнення ебонітом, коли між обкладками повітря (ε = 1), маємо:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 0,01}{5 \cdot 10^{-3}} = 1,77 \cdot 10^{-11} \text{ Ф.}$$

Після заповнення ебонітом (ε = 2,6):

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,6 \cdot 0,01}{5 \cdot 10^{-3}} = 4,6 \cdot 10^{-11} \text{ Ф.}$$

Поверхнева густина заряду

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{C_1 U_1}{S} = \frac{C_2 U_2}{S} = 531 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2.$$

3) В даній задачі розглядаються два граничних стани конденсатора: коли він не заповнений діелектриком та коли заповнений. Сам процес заповнення не враховується. Якщо заповнення ебонітом проводити при включеному джерелі напруги, тоді $U = \text{const}$, а, відповідно, і напруженість поля вільних зарядів на обкладках конденсатора зберігається незмінною $E = \dfrac{U}{d} = \text{const}$. З іншого боку, напруженість поля вільних зарядів (1.14)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Тоді до та після заповнення маємо:

$$\frac{U}{d} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0},$$

звідки поверхневі густини заряду:

$$\sigma_1 = \frac{U \varepsilon_1 \varepsilon_0}{d} = \frac{300 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-3}} = 5,31 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{U \varepsilon_2 \varepsilon_0}{d} = \frac{300 \cdot 2,6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-3}} = 1,38 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Оскільки ємність конденсатора від напруги не залежить, то до та після заповнення конденсатора ебонітом маємо ті ж самі значення, як і в попередньому випадку, а саме $C_1 = 1,77 \cdot 10^{-11}$ Ф та $C_2 = 4,6 \cdot 10^{-11}$ пФ.

1.2. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ

Електричний струм – впорядкований рух заряджених частинок у речовині чи у вакуумі. Умовою виникнення струму провідності в речовині є існування вільних зарядів (носіїв струму) й внутрішнього електричного поля. Носіями струму в металах є *вільні електрони*.

Сила струму

$$I = \frac{dq}{dt}, \tag{1.34}$$

де dq – заряд, що протікає через поперечний переріз провідника за час dt.

$[I]$ = Ампер = А.

Модуль *вектора густини струму* $\vec{j}$ чисельно дорівнює відношенню сили струму через елементарну площинку, що розташована в даній точці перпендикулярно напряму руху носіїв струму, до її площі $dS_{\perp}$:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \tag{1.35}$$

а напрям $\vec{j}$ збігається з напрямом вектора швидкості $\vec{u}$ впорядкованого руху позитивних носіїв (або зворотній напряму швидкості впорядкованого руху негативних носіїв).

$[j]$ = Ампер/метр^2 = А/м^2.

Дрейфова швидкість

$$u = \frac{j}{ne}, \tag{1.36}$$

де $n = \frac{N}{V}$ – густина вільних електронів, e – елементарний заряд.

Закон Ома для однорідної ділянки провідника в інтегральній формі: сила струму, що протікає по однорідному провіднику (рис. 1.20, *а*), пропорційна різниці потенціалів на його кінцях (напрузі) $U = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$I = \frac{U}{R}, \tag{1.37}$$

де R – електричний опір.

$[R]$ = Ом.

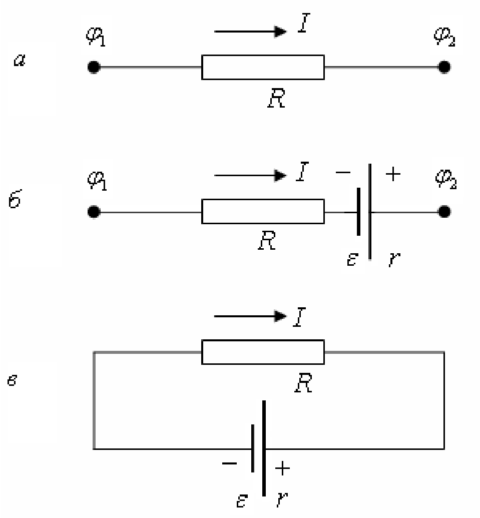

Рис. 1.20

Опір провідника залежить від його форми та розмірів, від матеріалу та температури, а також від конфігурації (розподілу) струму по провіднику. Для однорідного циліндрового провідника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{1.38}$$

де ρ – *питомий опір* (залежить від матеріалу і температури), l і S – довжина і поперечний переріз провідника, відповідно.

Температурна залежність питомого опору:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \tag{1.39}$$

де ρ_0 – питомий опір при 0°С, α – температурний коефіцієнт опору.

Закон Ома для однорідного провідника *в диференціальній формі:*

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E} , \tag{1.40}$$

де $\sigma = \rho^{-1}$ – питома електропровідність.

Електрорушійна сила (ЕРС) – алгебраїчна величина, чисельно рівна роботі сторонніх сил по перенесенню одиничного позитивного заряду вздовж замкнутого контуру. Якщо ЕРС сприяє руху позитивних носіїв струму у вибраному напрямі, то вона вважається позитивною, якщо перешкоджає, то негативною.

$\left[U\right] = \left[\varphi\right] = \left[\varepsilon\right]$ = Вольт = В.

Закон Ома для неоднорідної ділянки ланцюга (такої, що містить ЕРС) (рис. 1.20, *б*):

$$IR_{12} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varepsilon_{12} . \tag{1.41}$$

Для замкнутого ланцюга точки 1 та 2 збігаються, отже, $\varphi_1 = \varphi_2$, і тоді *закон Ома для повного ланцюга* (рис. 1.20, *в*):

$$IR_0 = \varepsilon , \tag{1.42}$$

де загальний опір $R_0 = R + r$ складається із зовнішнього опору *R* та внутрішнього опору джерела струму *r*.

Вузол – точка електричного ланцюга, в якому сходяться три і більше провідників.

Вітка – ділянка ланцюга між двома вузлами.

1 правило Кирхгофа: алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю (рис. 1.21, *а*):

$$\sum_k I_k = 0 . \tag{1.43}$$

Струми, що йдуть до вузла, вважаються додатними, а ті, що витікають із вузла – від'ємними. Якщо m – число вузлів у схемі, то кількість незалежних рівнянь згідно з 1 правилом Кирхгофа дорівнює $m-1$.

2 правило Кирхгофа: алгебраїчна сума спадів напруги у будь-якому замкнутому контурі дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що діють в цьому контурі (рис. 1.21, *б*):

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k \, . \qquad (1.44)$$

Кількість незалежних рівнянь згідно з 2 правилом Кирхгофа $\left[p-(m-1)\right]$, де *p*– кількість віток в ланцюзі.

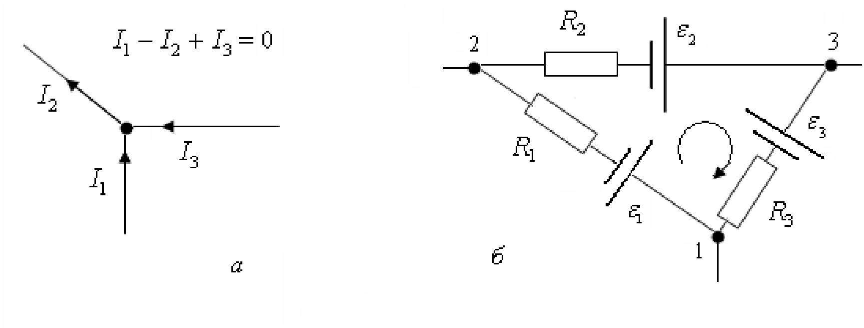

Рис. 1.21

Закон Джоуля-Ленца: кількість теплоти Q, що виділилася при проходженні струму протягом часу *t*, становить

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t = U \cdot I \cdot t = \frac{U^2}{R} t \, . \qquad (1.45)$$

Робота електричного струму на ділянці, до якої прикладена різниця потенціалів $U = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$A = (\varphi_1 - \varphi_2) I \cdot t = U \cdot I \cdot t \, . \qquad (1.46)$$

Загальний опір, якщо провідники з'єднані:

- *послідовно* $\qquad R = \sum_i R_i \, ; \qquad (1.47)$
- *паралельно* $\qquad \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \, . \qquad (1.48)$

Потужність струму

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}. \quad (1.49)$$

$[P]$ = Ватт = Вт.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Визначити опір R_0 ланцюга, схема якого показана на рис. 1.22, а. Опір кожного з провідників, розташованого між вузлами R = 1 Ом.

Розв’язання

В запропонованій схемі немає жодної пари провідників, з’єднаних між собою послідовно або паралельно (рис. 1.22, *а*). Проте схема симетрична, причому точки входу та виходу (затиски ланцюга) лежать на осі симетрії. Точка b симетрична точці e відносно осі ad. Отже, за наявності струму в ланцюзі, потенціали точок b та e будуть однаковими, тому їх можна об'єднати в один вузол b. З цієї ж причини можна з'єднати в один вузол c точки c та f (рис. 1.22, *б*). Далі перебудуємо цю схему в більш прийнятний вигляд та отримаємо нову еквівалентну схему ланцюга (рис. 1.22, *в*).

В еквівалентній схемі є три системи паралельно з’єднаних провідників: 1) R_1, R_2; 2) R_3, R_4, R_5, R_6; 3) R_7, R_8. Застосовуючи формули для розрахунку опору при паралельному з’єднанні (1.48) провідників, знайдемо:

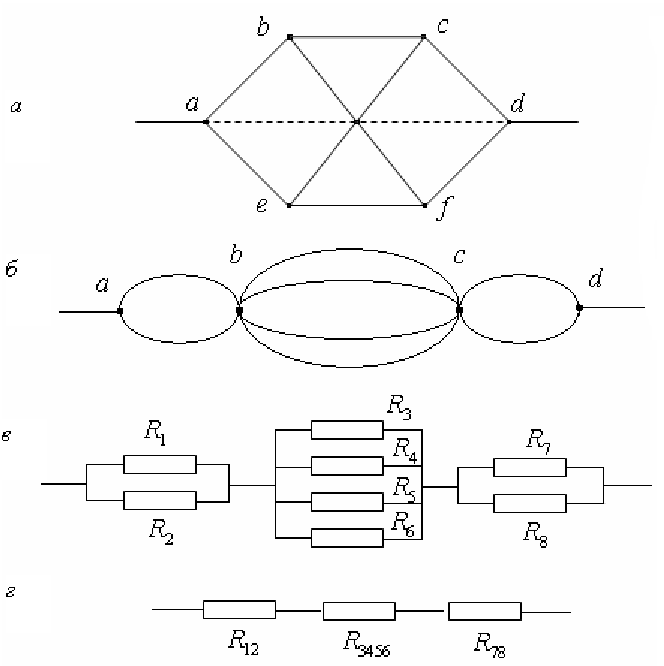

Рис. 1.22

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2. \qquad R_{12} = 0,5 \text{ Ом.}$$

$$\frac{1}{R_{3456}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 4. \qquad R_{3456} = 0,25 \text{ Ом.}$$

$$\frac{1}{R_{78}} = \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} = 2. \qquad R_{78} = 0,5 \text{ Ом.}$$

Провідники R_{12}, R_{3456} $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ та R_{78} з'єднані послідовно (рис. 1.22, *г*), тому загальний опір згідно з (1.47) дорівнюватиме

$$R_0 = R_{12} + R_{3456} + R_{78} = 0,5 + 0,25 + 0,5 = 1,25 \text{ Ом.}$$

Задача 2

В електричному ланцюзі (рис. 1.23, а) включені два джерела струму з $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1{,}5$ *В і внутрішнім опором* $r_1 = r_2 = r = 0{,}5$ *Ом кожний. Активні опори* $R_1 = R_4 = 2$ *Ом,* $R_2 = 1$ *Ом,* $R_3 = 3$ *Ом. Визначити силу струму в провіднику* R_3.

Розв'язання

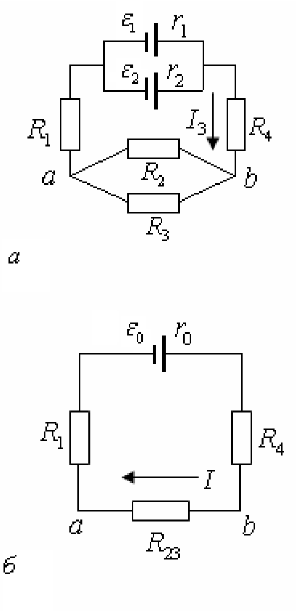

Рис. 1.23

Провідники R_2 та R_3 з'єднані паралельно, отже їх загальний опір (1.48)

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Два джерела струму ε_1 та ε_2 також підключені паралельно, тому така батарея має ЕРС $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1{,}5$ В, а внутрішній опір, враховуючи $\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$, дорівнює $r_0 = 0{,}25$ Ом. Тепер складний електричний ланцюг (рис. 1. 23, *а*) перетворюється в простий контур (рис. 1.23, *б*).

Згідно з законом Ома (1.42) для замкнутого ланцюга сила струму

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R_0 + r_0} = \frac{\varepsilon_0}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 + r_0} = \frac{\varepsilon_0}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 + \frac{r}{2}}.$$

Оскільки різниця потенціалів точок *a* та *b*

$$U_{ab} = I\frac{R_2R_3}{R_2+R_3} = I_3R_3,$$

тоді
$$I_3 = I\frac{R_2}{R_2+R_3}.$$

Підрахунки дають:

$$I = \frac{1,5}{2+\frac{3\cdot 1}{3+1}+2+0,25} = 0,3 \text{ А},$$

$$I_3 = 0,3\cdot\frac{1}{4} = 0,075 \text{ А}.$$

Задача 3

Амперметр з опором R_A = 5 Ом призначений для виміру струмів до I_A = 15 А. Який опір треба взяти і як його підключити, щоб цим приладом можна було вимірювати:

1) силу струму до I_0 =150 мА;

2) різницю потенціалів до U_0 =150 В?

Розв'язання

1) При вимірі сили струму на ділянці ланцюга *a–b* (рис. 1.24, *а*) амперметр підключається послідовно між цими точками. Якщо струм, що вимірюється, більше струму, на який розрахований амперметр ($I_0 > I_A$), то паралельно до амперметра необхідно підключити опір $R_Ш$, який називають *шунтом*. При паралельному з'єднанні падіння напруги на амперметрі і шунті однакові. Згідно з законом Ома (1.37) $I_AR_A = I_ШR_Ш$, звідки

$$I_Ш = I_A\frac{R_A}{R_Ш}.$$

Алгебраїчна сума струмів у вузлі (1.43) дорівнює нулю:

$$I_0 = I_A + I_Ш .$$

Тоді

$$I_0 = I_A + I_A \frac{R_A}{R_Ш} ,$$

звідки опір шунта

$$R_Ш = \frac{R_A}{\frac{I_0}{I_A} - 1} .$$

Підставляючи числові значення, одержимо:

$$R_Ш = \frac{5}{\frac{150}{15} - 1} = 0{,}55 \text{ Ом}.$$

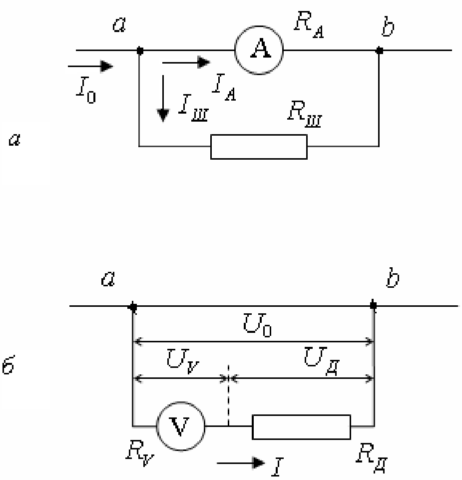

Рис. 1.24

2) Амперметр можна використовувати як вольтметр для виміру падінь напруги. Вольтметр при вимірі спаду напруги на ділянці ланцюга *a–b* рівному U_0 (рис. 1.24, *б*) підключається паралельно до цієї ділянки. Якщо спад напруги на ділянці *a–b* більше допустимого спаду напруги на вольтметрі $U_0 > U_V$, до нього послідовно приєднують *додатковий опір* $R_Д$. Сила струму *I*, що проходить через вольтметр та додатковий опір, однакова. Тоді згідно з законом Ома (1.37):

$$\frac{U_V}{R_V} = \frac{U_Д}{R_Д} ,$$

звідки
$$U_Д = \frac{R_Д}{R_V} U_V .$$

При послідовному з’єднанні (1.47) вольтметра та додаткового опору

$$U_0 = U_V + U_Д ,$$

$$U_0 = U_V + U_V \frac{R_Д}{R_V}.$$

Додатковий опір $$R_Д = R_V \left(\frac{U_0}{U_V} - 1 \right).$$

Максимальна напруга U_V, яку може витримати амперметр, який використовується в якості вольтметра, дорівнює $U_V = I_A R_A$, отже, додатковий опір

$$R_Д = R_A \left(\frac{U_0}{I_A R_A} - 1 \right).$$

Підставивши числові значення, маємо

$$R_Д = 5\left(\frac{150}{15 \cdot 10^{-3} \cdot 5} - 1 \right) = 9,9 \cdot 10^3 \text{ Ом}.$$

Задача 4

Джерела струму в ланцюзі (рис. 1.25) мають ЕРС ε_1 *= 110 В та* ε_2 *= 220 В, активні опори* $R_1 = R_2$ *= 100 Ом,* R_3 *= 500 Ом. Визначити струми в ланцюзі.*

Розв'язання

Силу струму в розгалуженому ланцюзі визначимо за допомогою правил Кирхгофа. Проставимо в вітках довільно напрями струмів I_1, I_2 та I_3. Дана схема має два вузли *a* і *d* (*m* = 2), отже, за першим правилом Кирхгофа можна скласти $m - 1 = 2 - 1 = 1$, тобто одне незалежне рівняння. Наприклад, для вузла *a:*

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

При складанні рівняння враховано правило знаків: струм, що тече у вузол, входить в рівняння із знаком «плюс», а струм, що тече з вузла, – із знаком «мінус».

Запишемо рівняння за другим правилом Кирхгофа. В ланцюзі p = 3 вітки. Це означає, що кількість рівнянь за другим правилом складає $p-(m-1)$ = 2.

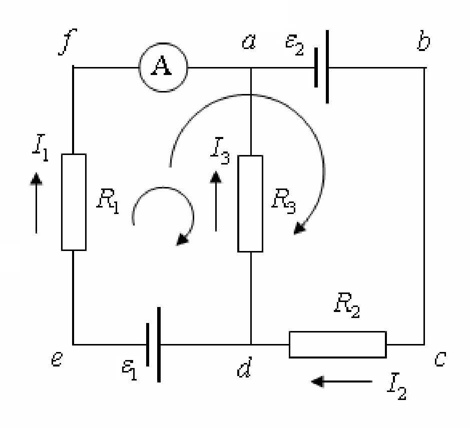

Рис. 1.25

Вибираємо напрям обходу контурів за годинниковою стрілкою. При складанні рівнянь за другим правилом Кирхгофа необхідно використовувати наступне правило знаків:

1) якщо струм за напрямом збігається з вибраним напрямом обходу, то відповідний добуток IR входить в рівняння зі знаком «плюс», інакше – зі знаком «мінус»;

2) якщо ЕРС підвищує потенціал у напрямі обходу, то ця ЕРС входить в рівняння зі знаком «плюс», якщо знижує – зі знаком «мінус».

За другим правилом Кирхгофа

для контуру *abcdef*: $I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$,

для контуру *adef*: $I_1R_1 - I_3R_3 = -\varepsilon_1$.

Рівняння, що записані за двома правилами Кирхгофа, складають систему рівнянь, що дозволяє знайти струми у всіх вітках ланцюга:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0, \\ I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \\ I_1R_1 - I_3R_3 = -\varepsilon_1. \end{cases}$$

Виразимо струми I_2 та I_3 з другого та третього рівнянь системи:

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_2} - I_1 \frac{R_1}{R_2},$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_1}{R_3} + \frac{\varepsilon_1}{R_3}$$

та підставимо їх в перше рівняння:

$$I_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_2} + I_1 \frac{R_1}{R_2} + I_1 \frac{R_1}{R_2} + \frac{\varepsilon_1}{R_2} = 0,$$

з якого знайдемо перший струм:

$$I_1 = \frac{\dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_2} - \dfrac{\varepsilon_1}{R_3}}{1 + \dfrac{R_1}{R_2} + \dfrac{R_1}{R_2}}.$$

Після підстановки числових значень, одержимо:

$$I_1 = \frac{\dfrac{220 - 110}{100} - \dfrac{110}{500}}{1 + \dfrac{100}{100} + \dfrac{100}{500}} = \frac{1{,}1 - 0{,}22}{2{,}2} = 0{,}4 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_2} - I_1 \frac{R_1}{R_2} = \frac{220 - 110}{100} - 0{,}4 \cdot \frac{100}{100} = 1{,}1 - 0{,}4 = 0{,}7 \text{ А},$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_1}{R_3} + \frac{\varepsilon_1}{R_3} = 0{,}4 \cdot \frac{100}{500} + \frac{110}{500} = 0{,}08 + 0{,}22 = 0{,}3 \text{ А}.$$

В відповіді усі значення сили струму додатні, отже, напрями струму нами були обрані вірно.

Задача 5

Визначити роботу електричних сил та кількість теплоти, що виділяється щосекунди:

1) в опорі, по якому тече струм I = 1 A, а до кінців якого прикладена різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ *= 2 В;*

2) в акумуляторі з ε *= 1,3 В, який заряджається током силою 1 А. Різниця потенціалів на його затисках* $U = \varphi_a - \varphi_b$ *= 2 В.*

Розв'язання

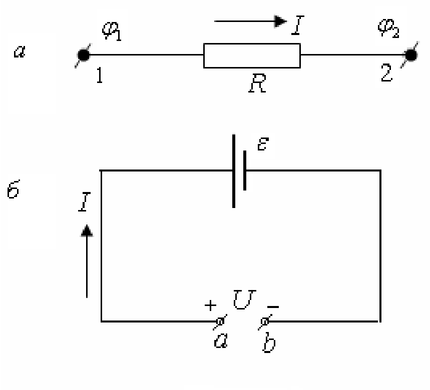

Рис.1.26

1) Оскільки ділянка, що розглядається (рис. 1.26, *а*), не містить ЕРС, то згідно з законом Ома (1.37) для однорідної ділянки ланцюга:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR\,.$$

У цьому випадку уся робота електричних сил (1.45) йде на нагрів резистора:

$$A = Q = (\varphi_1 - \varphi_2)\,I \cdot t = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \text{ Дж.}$$

2) При зарядці акумулятора його затиски приєднують до джерела напруги *U*, різниця потенціалів якого постійна. При цьому струм усередині акумулятора йде від його позитивного полюса до негативного, тобто в напрямі, що є зворотнім відносно струму розряду (рис. 1.26, *б*).

Робота електричних сил, як і у попередньому випадку, дорівнює

$$A = Q = (\varphi_a - \varphi_b)\,I\,t = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \text{ Дж.}$$

Щоб визначити кількість теплоти, що виділяється, знайдемо опір *R* із закону Ома (1.41) для неоднорідної ділянки ланцюга:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \varepsilon}{R},$$

звідки $$R = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \varepsilon}{I}.$$

Підставивши значення *R*, отримаємо:

$$Q = I^2 Rt = (\varphi_a - \varphi_b - \varepsilon)It = (2 - 1{,}3) \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}7 \text{ Дж}.$$

У даному випадку лише частина роботи електричних сил йде на нагрівання акумулятора, решта $A - Q$ = 1,3 Дж перетворюється на хімічну енергію акумулятора, що заряджається.

Задача 6

Реостат підключений до джерела струму з ε = 6 В та внутрішнім опором r = 1 Ом. При якому опорі реостату потужність струму буде максимальною? Визначити силу струму при максимальній потужності.

Розв'язання

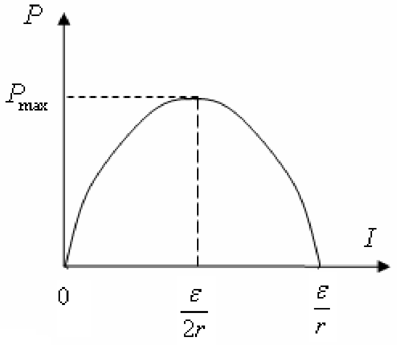

Рис. 1.27

Потужність струму (1.49) у реостаті

$$P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2}.$$

Визначимо значення опору *R*, при якому потужність *P* максимальна, дослідивши функцію *P*(*R*) на екстремум. Для цього візьмемо похідну та прирівняємо її нулю:

$$\frac{dP}{dR}=\frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}-\frac{2\varepsilon^2(R+r)}{(R+r)^3}=0,$$

$$R+r-2r=0,$$

$$R=r.$$

Силу струму визначимо за законом Ома (1.37) для замкнутого ланцюга:

$$I_{\max}=\frac{\varepsilon}{R+r}=\frac{\varepsilon}{2r}.$$

На рис. 1. 27 наведено графік залежності потужності, яка виділяється в зовнішньому ланцюзі, від сили струму. Як можна бачити з графіку, при струмах $I_1=0$ та $I_2=\frac{\varepsilon}{r}$ потужність в зовнішньому ланцюзі P = 0; при струмі $I_2=\frac{\varepsilon}{2r}$ вона має найбільше значення, яке дорівнює

$$P_{\max}=\frac{\varepsilon^2}{2r}.$$

Остаточно:

R = 1 Ом,

$$I_{\max}=\frac{\varepsilon}{2r}=\frac{6}{2\cdot 1}=6 \text{ А},$$

$$P_{\max}=\frac{\varepsilon^2}{2r}=\frac{6^2}{2\cdot 1}=18 \text{ Вт}.$$

Задача 7

Елемент замикається спочатку на зовнішній опір R_1 *= 2 Ом, а потім на зовнішній опір* R_2 *= 0,5 Ом. Знайти внутрішній опір та ЕРС елементу, якщо в кожному з випадків потужність, що виділяється в зовнішньому ланцюзі, однакова та дорівнює Р = 2,54 Вт.*

Розв'язання

Корисні потужності (1.49), що виділяються в зовнішньому ланцюзі при зовнішніх опорах R_1 та R_2, дорівнюють відповідно:

$$P_1 = I^2 R_1 = \frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1 + r)^2}, \quad P_2 = I^2 R_2 = \frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2 + r)^2}.$$

За умов задачі ці потужності однакові $P_1 = P_2$, отже:

$$\frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2 + r)^2},$$

$$R_1 (R_2 + r)^2 = R_2 (R_1 + r)^2,$$

$$R_1 R_2^2 + 2R_1 R_2 r + R_1 r^2 = R_2 R_1^2 + 2R_1 R_2 r + R_2 r^2,$$

$$r^2 (R_1 - R_2) = R_1 R_2 (R_1 - R_2).$$

Остаточно

$$r = \sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{0,5 \cdot 2} = 1 \text{ Ом}.$$

Електрорушійна сила з виразу для корисної потужності становить:

$$\varepsilon = \frac{P_1 \left(R_1 + r\right)^2}{R_1^2} = \frac{2,54 \cdot \left(2 + 1\right)^2}{2^2} = 5,72 \text{ В}.$$

Універсальні сталі	
Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль (світла) у вакуумі	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Коефіцієнт $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$9 \cdot 10^9$ Н·м^2·Кл$^{-2}$
Елементарний заряд (протон, електрон)	$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Заряд α - частинки	$q_\alpha = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл
Маса електрона	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
Маса протона	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Маса α - частинки	$m_\alpha \approx 4m_p = 6,64 \cdot 10^{-27}$ кг

Властивості речовин		
Речовина	*Густина, кг/м^3*	*Питомий опір, нОм·м*
Алюміній	$2,6 \cdot 10^3$	25
Залізо	$7,9 \cdot 10^3$	87
Мідь	$8,6 \cdot 10^3$	17
	Діелектрична проникність	
Гас	2	
Фарфор	6	
Ебоніт	2,6	

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И.В. Савельев. – М. : Наука, 1989. – 464 с.
2. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма / И.Е. Иродов. – М. : Высш. шк., 1991. – 288 с.
3. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1990. – 400 с.
4. Чертов А.Г. Задачник по физике: учеб. пособ. / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М. : Высш. шк., 1981. – 496 с.
5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – М. : Наука, 1988. – 416 с.
6. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. – М. : Высш. шк., 1978. – 351 с.
7. Мясников С.П. Пособие по физике / С.П. Мясников, Т.Н. Осанова. – М. : Высш. шк., 1988. – 399 с.
8. Російсько-український фізичний словник / В.В. Гейченко, О.З. Жмудський, П.П. Кузьменко, Є.Д. Майборода. – Харків : Основа, 1990 – 211 с.
9. Російсько-український словник наукової термінології: Математика. Фізика. Техніка. Науки про землю та космос / В.В. Гейченко, В.М. Завірюхіна, О.О. Зеленюк, В.Г. Коломієць, М.І. Кратко, В.В. Тельнюк-Адамчук, М.П. Хоменко. – К. : Наук. думка, 1998. – 892 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки до розв’язання задач за темою "Електромагнетизм. Частина І. Електрика" з курсу "Загальна фізика" українською мовою для студентів усіх спеціальностей та усіх форм навчання

Укладачі: **ВЕТЧИНКІНА Зоя Костянтинівна**
ДЗЮБЕНКО Наталя Іванівна
ЛЮБЧЕНКО Олена Анатоліївна
ТАВРІНА Тетяна Володимирівна

Роботу до видання рекомендував проф. О.П. Сук
Відповідальний за випуск – проф. О.Г. Багмут

В авторській редакції

План 2010 р., поз. 23 / 57-10

Підп. до друку 22.03.2010. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 2,0. Обл.-вид. арк. 2,5.
Наклад 200 прим. Зам. №____ Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ"
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ "ХПІ". 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21